Quaternions

Théorème : Soit $\mathbb{H}$ anneau à division non commutatif des quaternions.
Soit $G = \{a + bi + cj + dk \in \mathbb{H},\ a^2+b^2+c^2+d^2 = N(a+bi+cj+dk) = 1\}$ $\simeq \mathbb{S}^3$. $G/_{\{\pm 1\}} \simeq SO_3(\mathbb{R})$.

Notons $\forall q \in G$, $S_q : \begin{array}{l} \mathbb{H} \to \mathbb{H} \\ q' \mapsto qq'q^{-1} = qq'\bar{q} \end{array}$. S_q est $\mathbb{R}$-linéaire et bijective car $(S_q)^{-1} = S_{q^{-1}} = S_{\bar{q}}$.

Donc $S : q \mapsto S_q \in GL_4(\mathbb{R})$ est bien définie.

De plus, $\begin{cases} S_{q_1 q_2}(q') = q_1 q_2 q' q_2^{-1} q_1^{-1} = S_{q_1} \circ S_{q_2}(q') \text{ donc } \underline{S \text{ est un morphisme.}} \\ \forall a \in \mathbb{R},\ S_q(a) = q a q^{-1} = a q q^{-1} = a \text{ donc } \underline{S_{q|\mathbb{R}} = id_{\mathbb{R}},\ \forall q \in G.} \end{cases}$

Aussi S_q conserve la norme : $N(S_q(q')) = N(qq'q^{-1}) = N(q)N(q')N(\bar{q}) = N(q')$ car $N(q) = 1$.

Autrement dit, $S_q \in O(N)$ groupe orthogonal défini par N.
Puisque $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$, on a $O(N) \simeq O_4(\mathbb{R})$.

- Si $P = \{bi + cj + dk \in \mathbb{H},\ b,c,d \in \mathbb{R}\}$ ensemble des quaternions purs, alors P est l'orthogonal de $\mathbb{R}$ pour N (pour la forme polaire $\varphi : (q_1,q_2) \mapsto \frac{q_1\bar{q_2} + q_2\bar{q_1}}{2}$)
Puisque $S_{q|\mathbb{R}} = id_{\mathbb{R}}$, et $S_q \in O_4(\mathbb{R})$, P est stable par S_q. (S_q bijective)
Posons $s_q = S_{q|P} \in O(N_{|P}) \simeq O_3(\mathbb{R})$.
L'application $s : G \to O_3(\mathbb{R})$ est alors bien définie, est un morphisme (grâce aux propriétés sur S) de noyau $\{\pm 1\}$ ($s_q = id \Rightarrow q \in Z(\mathbb{H}) \Rightarrow q \in \mathbb{R}$ Or $q \in G$ donc $q = \pm 1$).

- Si $q = a + bi + cj + dk$, alors les coefficients de la matrice de s_q sont des expressions polynomiales de degré 2 en a,b,c,d, donc s est continue.
De là, $\det \circ s : G \to \{\pm 1\}$ est continue sur $G \simeq \mathbb{S}^3$ connexe.
Donc $\det \circ s$ est constante, égale à $\det \circ s(1) = \det(id) = 1$. Ainsi $\underline{s(G) \subset SO_3(\mathbb{R})}$

- Soit $p \in P \cap G$. Remarquons que $s_p(p) = pp\bar{p} = p$
Donc par $\mathbb{R}$-linéarité, s_p fixe $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(p)$. Donc s_p est une rotation d'axe (p).
De plus, $p^2 = p(-\bar{p}) = -pp^{-1} = -1$ car $\bar{p} = -p$ car $p \in P$.
ce qui assure que $(s_p)^2 = s_{p^2} = s_{-1} = id$ donc s_p est un renversement (car $s_p \neq id$ puisque $p \notin \{\pm 1\}$).
Donc $s(G)$ contient tous les renversements de $O_3(\mathbb{R})$, qui engendrent $SO_3(\mathbb{R})$
Donc s est surjectif : par thm d'isom, $G/_{\{\pm 1\}} \simeq SO_3(\mathbb{R})$